

Radiação de Corpo Negro

Paulo Sérgio Guimarães

Departamento de Física

Universidade Federal de Santa Maria

Santa Maria, RS, Brasil

Recebido em 3 de Junho, 1998

Este artigo descreve um procedimento de ajuste de dados experimentais adequado à análise de um fenômeno físico bem conhecido, a Radiação de Corpo Negro. Ele é proposto como instrumento pedagógico no processo cognitivo desenvolvido para o ensino de Física Básica a nível de segundo e terceiro graus. A maneira como os dados experimentais são tratados expõe o estudante a diversas técnicas de cálculo algébrico e numérico. Conseqüentemente, ela é adequada para experimentos avançados de laboratório de física assim como pode ser interpretada como uma ação pedagógica que visa enfatizar o caráter experimental da Física como ciência.

This paper describes a fitting of experimental data procedure suitable to analyse a well known physical phenomenon: the blackbody radiation. It is proposed as a pedagogic tool to be used in the cognitive process of Basic Physics teaching both at high school and college levels. The way the experimental data are analysed has been done exposes the student to several techniques of algebraic and numeric calculation. So, it is suitable for an advanced undergraduate physics laboratory and can be interpreted as a pedagogic deed to emphasize the Physics's experimental character.

I Introdução

No ensino, assim como na pesquisa científica, o experimento é simplesmente uma maneira de estabelecer um diálogo com a natureza, obtendo dela informações a respeito dos fenômenos que nos cercam. Pode-se dizer que os métodos para chegar ao saber são fundamentalmente os mesmos tanto para o pesquisador quanto para o aluno. O processo cognitivo ao realizar um experimento em aula se distingue da ciência fundamentalmente pelo fato do professor conduzir o aluno a reproduzir descobertas já realizadas. Em razão disso esse caráter experimental deve ser ensinado aos estudantes a partir de diferentes ações pedagógicas. Uma delas é, certamente, o laboratório onde o aluno tem oportunidade de desenvolver aptidões para realizar medidas ao mesmo tempo que se familiariza com as características dos instrumentos a serem utilizados para esse fim. A outra é a necessária análise adequada dos dados experimentais, mesmo que eles tenham sido obtidos em uma ocasião anterior ou mesmo que sejam dados históricos. Um exemplo marcante é o de Tycho Brae e Johannes Kepler. Enquanto Tycho Brae se notabilizou pela precisão com que obteve suas medidas do movimento dos astros, seu aluno Kepler se destacou justamente por sua capacidade de analisar os dados obtidos por seu mestre

e, a partir da sua interpretação, estabelecer as leis que regem esse movimento.

Em virtude da Física ser uma ciência eminentemente experimental nos deparamos frequentemente com situações em que se faz necessário ajustar uma curva teórica a um conjunto de dados experimentais representados graficamente. O professor não encontra maiores dificuldades para apresentar a seus alunos o tratamento que deve ser dispensado nos casos em que os dados resultam da observação de fenômenos como o movimento de um corpo que se desloca sem atrito ao longo de uma rampa inclinada ou quando se trata da descarga de um capacitor pertencente a um circuito RC. Isso ocorre porque, nesses casos, existe uma transformação de coordenadas bastante simples que faz com que as variáveis dinâmicas do sistema sejam representadas sob a forma de uma linha reta. A bem da verdade em alguns casos é preciso fazer um tratamento preliminar dos dados experimentais, que vai um pouco além de uma mera transformação de coordenadas mas não apresenta maiores dificuldades, para que isso ocorra. Um bom exemplo disso é a frequência de oscilação de um pêndulo físico.

Do ponto de vista do entendimento do caráter experimental da Física isso tem uma importância muito

grande. O estudante tem oportunidade de visualizar, de uma forma bastante clara e concreta, a ligação entre o fenômeno físico que ocorre na natureza e o modelo teórico usado para descrevê-lo. Com isso ele também adquire uma maior confiança no enfoque abstrato utilizado para descrever a natureza. A possibilidade de manusear diretamente um conjunto de dados experimentais e, a partir daí, reproduzir o saber científico que descreve o fenômeno físico que lhe está sendo transmitido é fundamental para que o estudante tenha claro o binômio laboratório-teoria, um dos aspectos mais interessantes da criação científica.

Infelizmente há um grande número de fenômenos para os quais esse processo de ajuste aparentemente não pode ser efetuado de forma simples ou apresentada de forma didática. Não existem mudanças simples de coordenadas que linearizem a curva analítica prevista pelo modelo teórico. Existe quase sempre a necessidade de se fazer um tratamento preliminar mais elaborado desses dados para que a curva experimental possa assumir uma forma cujo tratamento seja acessível a todos os estudantes. É possível, por outro lado, que os estudantes tenham dificuldade de acompanhar a apresentação desse tratamento, necessariamente mais sofisticado. Por outro lado, pode não ser suficiente que o docente apenas apresente ao estudante a expressão daquela função que fornece o melhor ajuste dos dados obtidos experimentalmente. Dentre esses casos possivelmente nenhum se encontra em posição mais destacada do que a curva que representa a radiação espectral emitida por um corpo negro [1] cuja análise vamos fazer com o intuito de ampliar o uso do processo de ajuste de curvas como ferramenta do processo de ensino de Física Básica.

II A radiação de corpo negro

Todo corpo aquecido emite energia sob a forma de radiação eletromagnética. Se a temperatura for suficientemente alta, essa emissão pode ser identificada facilmente sob a forma de luz visível. Conforme aumentamos a temperatura do corpo ele se torna cada vez mais brilhante, enquanto sua coloração se altera. Esse efeito é facilmente observado no filamento de tungstênio de uma lâmpada incandescente pelo qual passamos uma corrente elétrica cuja intensidade podemos variar. Conforme aumentamos a intensidade da corrente verificamos que ele inicialmente emite predominantemente na região do infravermelho, passando a assumir uma coloração que, inicialmente, é avermelhada. Essa coloração vai mudando até que, quando o filamento atinge uma temperatura próxima da temperatura de fusão do

tungstênio, $T \approx 3000^\circ\text{K}$, observamos a emissão de uma luz mais intensa e de tonalidade amarelada. Podemos concluir desse experimento que a intensidade da luz emitida é uma função crescente da temperatura do corpo e que a radiação emitida não é monocromática, mas uma superposição de diferentes contribuições devidas a todos os possíveis comprimentos de onda. Em outras palavras, quando o corpo se encontra a uma temperatura T existe uma função $u(\lambda, T)$ que é capaz de descrever o comportamento da intensidade de radiação com comprimento de onda λ emitida pelo corpo. O comportamento dessa função é mostrado na figura 1 para diferentes valores da temperatura do corpo.

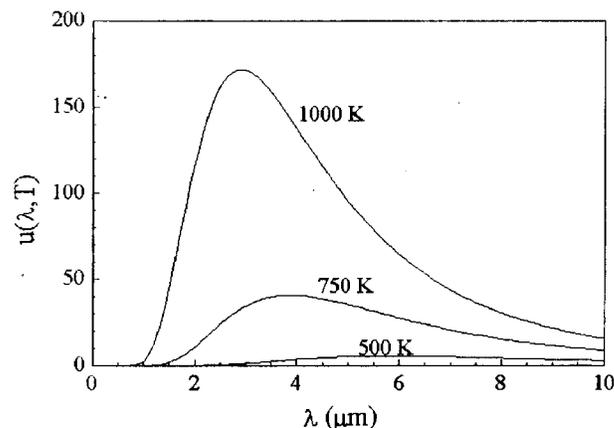


Figura 1. Comportamento da emissão espectral de um corpo negro para diferentes valores de T .

A partir desses resultados Stefan (1879) pôde demonstrar empiricamente que a potência total R_T emitida por um corpo aquecido, dada por:

$$R_T = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda,$$

depende unicamente da temperatura T em que se encontra esse corpo e é dada por:

$$R_T = \sigma T^4, \quad (1)$$

onde a constante de proporcionalidade σ , conhecida como constante de Stefan-Boltzmann é igual a:

$$\sigma = 5,672 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}$$

A validade da lei de Stefan pode ser verificada facilmente a partir de um gráfico do conjunto de valores experimentais, $R_T \times T$, que se dispõem seguindo uma linha reta, quando graficados em um formato log-log.

A partir dos trabalhos desenvolvidos por Kirchhoff na metade do século passado Wien pode mostrar (1894) que a densidade de energia espectral, $u(\lambda, T)$, associada à radiação com comprimento de onda λ que é emitida

por um corpo aquecido que se encontra a uma temperatura T possui a forma:

$$u(\lambda, T) = \lambda^{-5} f(\lambda T), \quad (2)$$

onde $f(x)$ é uma função universal que depende de uma única variável $x = \lambda T$. O máximo da função $u(\lambda, T)$ definida pela equação (2) é obtido a partir de

$$\frac{d}{d\lambda} u(\lambda, T) = \lambda^{-6} \left(\lambda T \frac{df(\lambda T)}{d(\lambda T)} - 5f(\lambda T) \right) = 0 \quad (3)$$

Como a condição $\lambda = \infty$ corresponde a um mínimo de $u(\lambda, T)$, o único máximo dessa função corresponde ao comprimento de onda $\lambda = \lambda_m$ que anular o termo entre parênteses no lado direito da equação (3), isto é, à única raiz não nula da equação:

$$x \frac{df(x)}{dx} - 5f(x) = 0 \quad (4)$$

onde $x = \lambda T$. Isto significa que a função $u(\lambda, T)$ possui um único máximo. Esse máximo ocorre para um comprimento de onda λ_m que depende da temperatura do corpo através da relação:

$$\lambda_m = bT^{-1} \quad (5)$$

onde b é uma constante universal. Essa dependência com a temperatura de λ_m , conhecida como lei do deslocamento de Wien, pode ser verificada facilmente. Para isso basta traçarmos o gráfico de $\lambda_m \times T^{-1}$. Fazendo isso verificamos que:

$$b = 2,898 \times 10^{-3} m \text{ } ^\circ K .$$

Wien propôs que a função universal $f(x)$ deveria ter a forma:

$$f(x) = C e^{-\beta/x} \quad (6)$$

onde C e β são parâmetros universais a serem determinados a partir dos dados experimentais. Mais que isso, β não deveria depender nem do corpo nem da temperatura em que ele se encontra. Traçando o gráfico em formato mono-log da função

$$f(x) \equiv g(\lambda T) = \lambda^5 u(\lambda, T),$$

obtida a partir dos valores apresentados na tabela 1, verificamos que, quando o valor de x é pequeno, essa curva justifica amplamente a proposta feita por Wien desde que:

$$\beta = 1,432 \times 10^{-2} m \text{ } ^\circ K ;$$

$$C = 4,947 \times 10^{-24} J \text{ } m .$$

Contudo, o mesmo não vale para valores grandes de x .

Em 1900, Rayleigh e Jeans obtiveram, a partir de argumentos fornecidos pela mecânica estatística clássica, que a densidade espectral $u(\lambda, T)$ deveria ter a forma:

$$u(\lambda, T) = 8\pi k T \lambda^{-4} , \quad (7)$$

onde k é a constante de Boltzmann e c é a velocidade da luz. Esse resultado responde bem pelo comportamento de $u(\lambda, T)$ na região do infravermelho, mas não na região de pequenos comprimentos de onda. Ele também implica a radiação total emitida por um corpo negro ser infinita, para qualquer temperatura, o que não corresponde à realidade.

A partir do conhecimento dos resultados obtidos anteriormente tanto por Wien como por Rayleigh-Jeans, Planck propôs que a radiação espectral de um corpo negro à temperatura T deveria ser descrita por uma função que reproduzisse o resultado obtido por Wien no limite de altas frequências ($h\nu \gg kT$) e o resultado de Rayleigh-Jeans para baixas frequências ($h\nu \ll kT$). Ele verificou, de forma empírica [2], que uma função com esse comportamento é dada por:

$$u(\lambda T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (8)$$

onde h é a constante de Planck, cujo valor hoje se conhece e é igual a:

$$h = 6,6276 \times 10^{-34} J.s.$$

Na região de grandes comprimentos de onda ($\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$) é possível escrever, com boa dose de precisão, que:

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 = \left(1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \dots \right) - 1 \approx \frac{hc}{\lambda kT}$$

Com isso a função $u(\lambda, T)$ proposta por Planck pode ser aproximada por:

$$u(\lambda, T) \approx \frac{hc}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{hc}{\lambda kT}} = 8\pi kT \lambda^{-4};$$

$$\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1,$$

que é o comportamento obtido por Rayleigh e Jeans. Por outro lado, na região do ultravioleta ($h\nu \gg kT$) podemos fazer a aproximação:

$$\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \approx \frac{1}{e^{hc/\lambda kT}} = e^{-hc/\lambda kT}.$$

obtendo, desse modo, o comportamento assintótico proposto por Wien:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}; \quad \frac{hc}{\lambda kT} \gg 1,$$

desde que os parâmetros C e β sejam dados por

$$C = 8\pi hc; \quad \beta = \frac{hc}{k} \quad (9)$$

É importante ressaltar que a expressão $u(\lambda, T)$ proposta por Planck para descrever o comportamento espectral da emissão de radiação por um corpo negro consegue reproduzir o comportamento assintótico da curva obtida experimentalmente, tanto para valores grandes como para valores pequenos de λ . Contudo, isso não basta. É preciso que ela descreva o comportamento da curva experimental também para valores intermediários de λ , ou seja, que ela deve reproduza os valores experimentais nessa região. Dentre outras coisas o máximo da função $u(\lambda, T)$ teórica deve ocorrer para o mesmo valor de λ que o máximo da curva experimental obtida em laboratório.

Para qualquer temperatura T o máximo da curva teórica proposta por Planck corresponde a um valor de comprimento de onda, λ , que satisfaz à condição:

$$\frac{d}{d\lambda} u(\lambda, T) = 8\pi hc \frac{\lambda^{-7}}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)^2} \left(\left(\frac{hc}{kT} - 5\lambda \right) e^{\frac{hc}{\lambda kT}} + 5\lambda \right) = 0$$

O leitor pode verificar que esta expressão tem duas soluções triviais,

$$\lambda = 0 \quad e \quad \lambda = \infty,$$

que correspondem a mínimos da função $u(\lambda, T)$. Existe uma terceira solução, que é raiz da equação:

$$\left(\frac{hc}{kT} - 5\lambda \right) e^{\frac{hc}{\lambda kT}} + 5\lambda = 0,$$

e corresponde a termos um comprimento de onda λ_m dado por:

$$b \equiv \lambda_m T \approx 0,1987040962 \frac{hc}{k} = 2,845 \times 10^{-3} m - ^\circ K,$$

um valor bastante próximo daquele que havia sido obtido anteriormente através de um procedimento completamente independente deste. Isto é mais um indicativo, mas não uma prova, de que a curva teórica deve reproduzir o comportamento geral apresentado pelos dados experimentais.

III O ajuste à curva de Planck

A rigor, seria necessário ajustar os valores experimentais da radiância espectral $u(\lambda, T)$ obtidos experimentalmente no laboratório à curva teórica proposta por

Planck, o que se consegue minimizando a diferença entre elas. Infelizmente, essa não é uma tarefa das mais simples. A expressão matemática da função que descreve o erro a ser minimizado levar-nos-ia, fatalmente, a uma equação transcendental com uma forma bastante complexa. A solução dessa equação só pode ser através do uso de métodos de cálculo numérico. A rigor, esses métodos numéricos não apresentam maiores dificuldades. Contudo, o seu emprego fugiria bastante do enfoque normalmente utilizado ao longo da disciplina com que se estivesse lidando, assim como consumiria um tempo considerável. Por isso, a sua apresentação em sala de aula tem um valor didático questionável. Felizmente existe um procedimento alternativo que pode ser empregado com sucesso neste caso, do qual iremos tratar a seguir. Para isso é necessário retomar a proposta de Planck para a função $u(\lambda, T)$ que descreve a radiância espectral de um corpo negro:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Se, como antes, definirmos novas variáveis[3]:

$$x = \frac{1}{\lambda T} \quad e \quad \beta = \frac{hc}{k}$$

é possível definir uma nova quantidade, $G(x)$, dada por:

$$G(x) = \frac{1}{8\pi k} \lambda^5 u(\lambda, T) \equiv \beta \frac{1}{e^{\beta x} - 1} . \quad (10)$$

Se, por outro lado, levarmos em consideração uma relação matemática já conhecida:

$$\frac{d}{dx}(\ln(e^{-\beta x} - 1)) = -\beta \frac{e^{-\beta x}}{e^{-\beta x} - 1} = \beta \frac{1}{e^{\beta x} - 1}$$

veremos que a função $G(x)$ definida através da equação (10) satisfaz a propriedade:

$$G(x) = \frac{d}{dx}(\ln(e^{-\beta x} - 1)) \quad (11)$$

Isto significa que, integrando ambos os lados da equação (11) com respeito à variável independente x , obtemos uma nova função $J(x)$:

$$J(x) = - \int_x^\infty G(x)dx = \ln(1 - e^{-\beta x}) .$$

A função $G(x)$ independe da temperatura do corpo. Conseqüentemente $J(x)$ também será uma função universal.

A integração, ao longo da variável x , dos valores da função $G(x)$ obtidos a partir da experiência deve ser efetuada numericamente. Em princípio pode-se obter resultados suficientemente precisos bastando que seja utilizado o método dos trapézios [4]. Assim, se definirmos a quantidade:

$$\Phi(x) \equiv 1 - e^{J(x)} = 1 - e^{-\int_x^\infty G(x)dx} = e^{-\beta x} . \quad (12)$$

veremos que essa nova função, $\Phi(x)$, decairá exponencial com a variável x . Como consequência, recaímos no caso de uma função cujo ajuste é bem conhecido.

Como o domínio da variável independente x está limitado ao intervalo de valores experimentais $x_1 \leq x \leq x_N$ obtidos no laboratório é conveniente reescrevermos a integral que aparece na definição de $\Phi(x)$ na forma:

$$\int_x^\infty G(x)dx = \int_x^{x_N} G(x)dx + \gamma , \quad (13)$$

onde:

$$\gamma \equiv \int_x^\infty G(x)dx .$$

Se o valor de x_N for suficientemente grande é possível que o segundo termo que aparece do lado direito da

equação (13) possa ser desprezado, isto é, que possamos assumir que $\gamma \approx 0$. Na prática esta condição é, equivalente a:

$$\beta x_N \geq 10 . \quad (14)$$

Conseqüentemente

$$\Phi(x) \equiv 1 - e^{-\int_x^{x_N} G(x)dx} \approx e^{-\beta x} . \quad (15)$$

A precisão com que os dados experimentais foram ajustados poderia ainda ser melhorada. Para isso bastaria levar em consideração que não temos, a rigor, nenhuma garantia prévia de que a condição (14) seja satisfeita. É sempre possível que, embora pequeno, o valor de γ na realidade seja finito e, portanto, precise ser levado em consideração. Este fato implica termos que reescrever a equação (14) na forma:

$$\Phi(x) \equiv 1 - e^{-\gamma - \int_x^{x_N} G(x)dx} = e^{-\beta x} . \quad (16)$$

Na região em que o valor de γ é determinado podemos fazer a aproximação:

$$G(x) \approx \beta e^{-\beta x}$$

o que significa termos:

$$\gamma = e^{-\beta x_N} . \quad (17)$$

Como vemos, o valor de γ é uma função do parâmetro β , que por seu lado, depende diretamente do valor de γ . Logo, a rigor, nenhuma dessas duas expressões, se tomada separadamente, poderia ser utilizada para determinar o valor dos parâmetros β e γ . Contudo, é possível fazer uma aproximação adicional que corresponde a utilizar

$$\gamma(\beta) \approx \gamma(\beta_0) = e^{-\beta_0 x_N} ,$$

onde β_0 é o valor do parâmetro β que obtivemos anteriormente tomando $\gamma = 0$.

Caso seja necessário esse processo, que recebe o nome de auto-consistente, pode ser repetido tantas vezes quantas julgarmos necessário. Em cada etapa o valor de β obtido na etapa anterior é utilizado para determinar o valor de γ que, por sua vez, é utilizado para obter o valor de β em uma etapa posterior. Normalmente esse processo é interrompido quando a precisão obtida satisfaz os interesses a que se destina o resultado.

Tabela 1: Dependência espectral $u(\lambda, T)$ da radiação emitida por um corpo negro ideal que se encontra à temperatura de 1595 °K. O comprimento de onda λ é medido em unidades de μm , enquanto que a radiância $u(\lambda, T)$ é medida em unidades de $10^3 \text{ J/m}^3\text{-m}$.

λ	$u(\lambda, T)$						
0,651	0,075	1,266	1,245	2,788	1,117	4,016	0,582
0,705	0,102	1,465	1,665	2,888	1,075	4,417	0,438
0,721	0,120	1,673	1,772	2,894	1,052	4,609	0,391
0,793	0,192	1,811	1,778	3,029	0,980	4,814	0,356
0,811	0,212	2,003	1,730	3,125	0,926	4,968	0,313
0,891	0,403	2,131	1,686	3,330	0,808	5,135	0,295
0,894	0,425	2,237	1,642	3,401	0,772	5,304	0,263
1,010	0,692	2,372	1,546	3,535	0,752	5,478	0,235
1,010	0,716	2,529	1,383	3,638	0,711	5,785	0,198
1,154	1,064	2,788	1,145	3,731	0,680	6,186	0,166

IV Resultados e Conclusões

A partir de medidas realizadas em laboratório para um corpo negro à temperatura de 1595 K [1] foram obtidos os resultados apresentados na tabela 1. Se seguirmos os passos descritos na seção anterior esses resultados experimentais nos permitem obter o conjunto de valores da variável $x = 1/\lambda T$ e da função $\Phi(x)$ apresentado, em formato mono-log, na figura 1. Analisando esse gráfico verificamos que, conforme previsto pelo modelo teórico, essa função $\Phi(x)$ apresenta um decaimento tipicamente exponencial com a variável x .

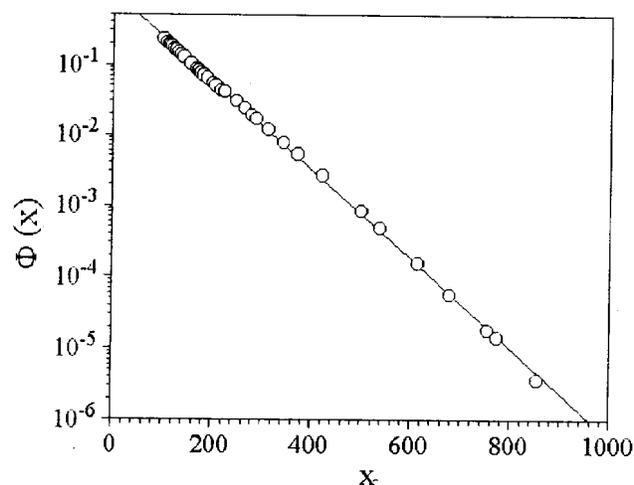


Figura 2. Comportamento da função $\Phi(x)$ obtida a partir da tabela 1.

Efetuada o ajuste dessa curva através do método de mínimos quadrados, costumeiramente utilizado em laboratório [5], obtemos:

$$\beta_0 = 1,439 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K} \Rightarrow h = \frac{\beta k}{c} = 6,629 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Esse resultado é sensivelmente próximo do valor mais exato encontrado na literatura. A precisão obtida na determinação de h se encontra bastante próxima dos limites de precisão com que os dados experimentais foram determinados. Por outro lado como,

$$\beta_0 x_N = 13,9 \Rightarrow \gamma \approx 10^{-6} \ll 1.$$

é possível prescindirmos de um procedimento auto-consistente. O ajuste teórico aos resultados experimentais que obtivemos é apresentado na figura 3.

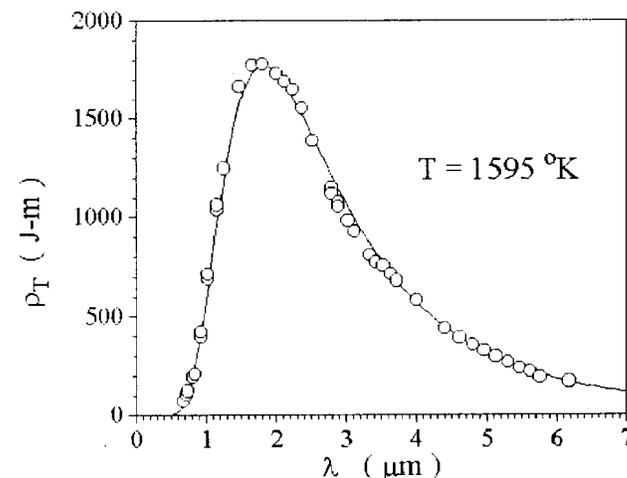


Figura 3. Comportamento da densidade espectral de um corpo negro ideal.

O procedimento apresentado neste trabalho pode ser utilizado, sem maiores dificuldades, para demonstrar a estudantes de física básica, de qualquer nível como obter a função que descreve a intensidade da

emissão espectral de um corpo negro a partir dos resultados obtidos em laboratório. O procedimento proposto dá margem ao professor propor os mais diversos exercícios a seus estudantes. Dentre eles dois se destacam de imediato. O primeiro seria demonstrar, a partir dos resultados experimentais apresentados na tabela 1, que os dados experimentais obedecem à lei de Wien para grandes comprimentos de onda ($\lambda > 3,5\mu\text{m}$) e a lei de Raileigh-Jeans para pequenos valores de λ ($\lambda < 1,0\mu\text{m}$).

References

- [1] Veja, por exemplo, *Física Quântica*, de R. Eisberg e R. Resnick, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1988.
- [2] Historicamente é sabido que a equação (8) primeiro foi obtida de forma empírica para, a partir desse resultado, ser estabelecido o modelo teórico que explicou o processo de emissão de radiação por um corpo negro.
- [3] O fato de definirmos uma variável independente x que é o inverso daquela estabelecida por Wien em nada diminui a generalidade do tratamento proposto. Por outro lado, como o leitor observará facilmente, esta definição traz algumas vantagens práticas.
- [4] *Curso de Cálculo Numérico V*. Ruas de Barros Santos, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, 1972.
- [5] *Ajuste de Curvas Experimentais*, P. S. Guimarães, notas de aula (no prelo).